

이동 경계를 갖는 얇은 탄성 아치의 운동방정식에 관한 연구

손수덕*, 하준홍**

*한국기술교육대학교 디자인·건축공학부

**한국기술교육대학교 교양학부

e-mail:hjh@koreatech.ac.kr

A Study on the Motion Equation of a Shallow Elastic Arch under Moving Boundary

Sudeok Shon*, Junhong Ha**

*School of Industrial Design & Architectural Engineering, Korea University of Technology
and Education

**School of Liberal Arts, Korea University of Technology and Education

요 약

본 연구에서는 이동 경계를 갖는 대칭 탄성 아치의 수리 모델에 관해서 연구하였다. 고정 경계를 갖는 아치의 방정식을 이동 경계를 가진 모델로 유도하고, 시간에 관해서 이동하는 모델을 고정 경계의 형태로 변환하여 방정식을 유도한다. 이것은 이동 경계를 고정 경계 모델과 같이 다룰 수 있다.

1. 서론

이동 경계 문제(moving boundary problem)는 진동에서 경계가 이동하여 발생하는 역학적 문제에서 볼 수 있으며, 경계의 이동으로 봉이 늘어나는 예로 설명할 수 있다. 이것은 시간(time)에 따라 해석 대상의 영역이 변하는 비-원통형 영역(non-cylindrical domain)의 문제에 해당하며, 물리적인 모델의 형성과 형성된 모델의 해를 구하는 것 또한 쉽지 않다.

이러한 모델은 공학적으로도 많이 다루어지는데 경계의 수평 이동을 고려한 수직진동 시스템으로 나타나기도 한다. 예로서 키르히호프-캐리어(Kirchhoff-Carrier) 모델에 기초한 이동 경계 탄성 막(elastic membrane), 오일러-베르누이 이론에 기초한 축 방향 이동 경계의 보(axially moving beam) 등이 있으며¹⁾⁵⁾, 주로 적분-미분 방정식의 형태⁶⁾를 갖추고 있다. 이것은 오일러-베르누이 보 또는 키르히호프의 이론에 기초한 모델이므로 중립축의 법선(normal)은 변형 후에도 일정한 것으로 가정된다.

이들에서는 이동에 대한 질량 분포의 변화는 주로 고려하지 않고, 이동 축 방향의 속도에 대한 영향을 고려해 모델링한다. 또한, 이동 경계의 탄성 막이나 보의 연구에서는 이동 경계로 인한 속도의 영향이 고려되지 않았고, 다만 내부 축력이 시간에 따라 변하는 경계가 고려된다. 특히, 비-원통형 영역은 원통형(cylindrical) 영역으로 변환하여 문제에 접근하였으며, 시스템의 다양한 수치적 결과를 얻었다.

본 연구에서는 이러한 이동 경계를 갖는 얇은 아치⁷⁻¹⁰⁾의 수리모형과 원통형 문제로 변환된 동적 방정식에 대해서 다루고자 한다.

2. 이동 경계를 얇은 탄성 아치

y 를 고정된 경계에서 정의된 얇은 아치의 변형 형상이라 할 때 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho A y_{,tt} + EI y_{,xxxx} - \tau y_{,xx} + c y_{,t} = f \quad (1)$$

여기서, ρ , E , A , I 는 각각 밀도, 탄성계수, 단면적, 단면 이차모멘트이며, y_0 와 y 는 초기 형상과 진동 형상이다. 경계 $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R} : \alpha(t) < x < \beta(t), t \in [0, T_1]\}$ 를 고려하면 계수 τ 를 Ω_t 에 관해서 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau = \frac{EA}{\theta(t)} \int_{\Omega_t} u_{,x} dx + \frac{EA}{2\theta(t)} \int_{\Omega_t} (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx \quad (2)$$

여기서, $\theta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ 이다. 이 관계를 이용해서 위식을 정리하면,

$$\tau = \tau_0 + \frac{EA(\theta - \theta_0)}{\theta} + \frac{EA}{2\theta} \int_{\Omega_t} (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx \quad (3)$$

이다. 이를 이용해서 원통형 문제로 변환하면 이동 경계를 갖는 얇은 아치의 동적 지배방정식을 구할 수 있으며, 시뮬레이션을 수행한다.

감사의 글

이 논문은 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2020R1I1A1A01065032) 또한 이 논문은 2019년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2019R1A2C2010693).

참고문헌

- [1] Pham, P.T. & Hong, K.S., "Dynamic models of axially moving systems: A review," *Nonlinear dynamics*, 100 (2020) pp.315-349.
- [2] Ferrel, J.L. & Medeiros, L.A., "Vibrations of elastic membranes with moving boundaries," *Nonlinear Analysis*, 45(3) (2001) pp.63-382.
- [3] Clark, H.R., Rincon, M.A. & Rodrigues, R.D., "Beam equation with weak-internal damping in domain with moving boundary," *Applied Numerical Mathematics*, 47 (2003) pp.139-157.
- [4] Chen L.Q. & Yang, X.D., "Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models," *International Journal of Solids and Structures*, 42 (2005) pp.37-50.
- [5] Wang, L.H., Hu, Z.D., Zhong, Z. & Ju, J.W., "Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity," *Acta Mechanica*, 206 (2009) pp.149-161.
- [6] Emmrich, E. & Thalhammer, M., "A class of integro-differential equations incorporating nonlinear and nonlocal damping with applications in nonlinear elastodynamics: Existence via time discretization," *Nonlinearity*, 24(9) (2011) pp.2523 - 2546.
- [7] Ha, J., Gutman, S., Shon, S. & Lee, S., "Stability of shallow arches under constant load," *International Journal of Non-linear Mechanics*, 58 (2014) pp.120-127.
- [8] Gutman, S. & Ha, J., "Shallow arches with weak and strong damping," *Journal of the Korean Mathematical society*, 54(3) (2017) pp.945-966.
- [9] Gutman, S., Ha, J. and Shon, S.D., "Estimation algorithm for physical parameters in a shallow arch,"

Journal of the Korean Mathematical Society, 58(3) (2020) pp.723-740.

- [10] Shon, S. & Ha, J., "Dynamic instability and instantaneous frequency of a shallow arch with asymmetric initial conditions," *Journal of Korean Association for Spatial Structures*, 20(2) (2020) pp.77-85.