

# 이동 경계를 갖는 대칭 탄성 막의 수리 모델에 관한 연구

손수덕\*, 하준홍\*\*

\*한국기술교육대학교 디자인·건축공학부

\*\*한국기술교육대학교 교양학부

e-mail:sdshon@koreatech.ac.kr

## A Study on the Mathematical Model of a Symmetrically Elastic Membrane under Moving Boundary

Sudeok Shon\*, Junhong Ha\*\*

\*School of Industrial Design Eng. & Arch. Eng., Korea Univ. of Technology and Education

\*\*School of Liberal Arts, Korea Univ. of Technology and Education

### 요 약

이동 경계를 갖는 대칭 탄성 막의 수리 모델에 관해서 연구하였다. 탄성 막의 면외 방향의 일반적인 변형상태와 경계의 이동으로 인해서 나타나는 면내의 축 변형상태가 함께 고려되는 모델에 대해서 상태방정식의 유도과정에 대해서 다루었다. 막의 굽힘에 대한 영향은 무시하였으며, 초기장력과 이동 경계로 인한 면내 변위가 문제의 범위에 포함된다. 이러한 상태에 대한 포텐셜 에너지 함수와 물리적 가정에 대한 상태방정식을 설명하였고, 시스템의 상태방정식에 대한 해의 특성과 연산자 등을 정의하였다. 물리적 가정에서 나타나는 전단의 영향을 고려하지 않는 모델의 특성과 휨이 고려된 모델의 지배방정식 구성도 함께 살펴보았다.

### 1. 서론

이동경계문제(moving boundary problem)은 종종 Stefan problem이라고도 불리는데 실제적인 많은 문제에서 중요한 경우로 나타난다. 극지방 만년설(polar ice cap)이 녹는 문제, 아치나 쉘의 진동에서 경계가 이동함으로 나타나는 역학적 문제, 전개식 막(deployable membrane) 안테나의 주름을 펼치기 위한 경계이동문제, 개폐식 막(retractable membrane) 지붕의 초기장력을 도입하기 위한 경계의 조정 문제 등에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 이처럼 빈번하게 나타나는 공학적 문제의 해결에서 수리 모델과 상태방정식의 해를 연구하는 것은 문제를 다루는 데 영향을 미칠 수 있다.

### 2. 이동 경계를 갖는 탄성 막 모델

고정경계를 갖는 얇은 탄성 막의 2차원 진동방정식을 개구간  $\Omega \in R^2$ 에서 정의하면 다음과 같다.

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tau \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mu_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial y^2} \right) + \gamma \frac{\partial w}{\partial t} = f, \quad \text{for } (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

여기서  $m(=\rho h)$ ,  $\gamma$ ,  $h$ 는 각각 질량 감쇠 정수와 막의 두께

이다.  $w(x, y, t)$ 는 막의 중립축의  $\mathbf{x}=(x, y)$ 에 대한 면외 방향 변위 함수이다. 첫 번째 괄호 항의 계수  $\tau$ 는 합응력으로  $\tau_0 + \hat{\tau}$ 로 구성된다. 여기서,  $\tau_0$ 는 막의 단위 길이당 초기장력이고  $\hat{\tau}$ 는 비선형성에 의한 추가된 응력이다. 좌변 두 번째 괄호 항은 휨에 관한 항이고, 는 각각 휨모멘트이다. 이 모델은 일반적인 막이 아니라 장력을 받는 박판이다. 휨에 대한 항이 없으면, 방정식은 탄성 막 방정식이 된다.

$u$ 와  $v$ 를  $(x, y, t)$ 에 관한 면내 변위 함수로 두자. 면내 장력의 경우 응력  $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x, \sigma_y)$ 에 관한 합 응력  $\hat{\boldsymbol{\tau}}=(\hat{\tau}_x, \hat{\tau}_y)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz \quad (2)$$

모델은 면외 응력이 상대적으로 무시된 상태인 것과 전단 응력  $\sigma_{xy}$ 는 고려하지 않도록 한다.

이동 경계  $\Omega_t$ 는  $t$ 에 관한 경계이고, 닫힌 경계이다.  $\Omega_t$ 에서 막의 축변형을 정의하기 위해 두 부분으로 나누어 생각하자. 하나는  $\boldsymbol{\epsilon}^m$ 으로 이동 경계에 의한 면내 변위의 변형이고, 다른 하나는 면외 방향의 변위에 의한 변형  $\boldsymbol{\epsilon}^o$ 로 대 변형 적합 조건으로부터  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^o$ 는 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$\boldsymbol{\epsilon}^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix}, \text{ and } \boldsymbol{\epsilon}^o = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_{,x})^2 \\ (w_{,y})^2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서, 아래 첨자  $_{,x}$ 는  $x$ 에 관한 미분이다. 식(3)을 이용해  $\hat{\tau}$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} dz \{ \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^o \} \\ &= \frac{\kappa}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \{ \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^o \} \end{aligned} \quad (4)$$

장력은 이동경계에 따라 변화하며, 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega_t} \hat{\tau} d\mathbf{x} = \kappa \int_{\Omega_t} u_{,x} d\mathbf{x} + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega_t} (w_{,x})^2 d\mathbf{x} \quad (5)$$

$a(\Omega)$ 를  $R^2$ 에서  $\Omega$ 의 면적이라고 하면,  $\hat{\tau}(t)$ 은  $\mathbf{x}$ 에서 상수이다. 그러므로 식(1)의 막 모델은  $\Omega_t$ 에서  $\tau$ 로 표현된다.

다음으로 얇은 막이 얇은 판과 같은 휨 강성을 가질 때 모델은 휨에 관한 항이 식(1)에서 추가로 고려된다. 따라서 응력-변형관계는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \mathbf{M} \boldsymbol{\epsilon} \quad (6)$$

이동경계영역  $\Omega_t$ 를 고려하자.  $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^m$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^o$ 와  $\boldsymbol{\epsilon}^b$ 를 식(3)에 추가하면, 변형은  $\Omega_t$ 에서  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^o + \boldsymbol{\epsilon}^b$ 와 같다.

$$\boldsymbol{\epsilon}^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\epsilon}^o = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_{,x})^2 \\ (w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}, \text{ and } \boldsymbol{\epsilon}^b = -z \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

각각의 식을 대입하고 두께에 따라 적분하면,  $\Omega_t$ 에서의  $\boldsymbol{\mu}$ 를 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \mathbf{M} \int_{-h/2}^{h/2} z \{ \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^o + \boldsymbol{\epsilon}^b \} dz \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \mathbf{M} \int_{-h/2}^{h/2} -z^2 \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix} dz = -\zeta \mathbf{M} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$\boldsymbol{\mu}$ 는  $\boldsymbol{\epsilon}^m$  and  $\boldsymbol{\epsilon}^o$ 에 독립이고, 식(8)을 식(1)에 직접 대입하면  $\Omega_t$ 에서의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} mw_{,tt} - \left\{ a(t) + b(t) \int_{\Omega_t} (w_{,x})^2 d\mathbf{x} \right\} \\ \Delta w + \zeta \Delta^2 w + \gamma w_{,t} = f \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $a(t)$ 와  $b(t)$ 는 다음과 같다.

$$a(t) = \tau_0 + \frac{\kappa}{a(\Omega_t)} \int_{\Omega_t} u_{,x} d\mathbf{x}, \text{ and } b(t) = \frac{\kappa}{2a(\Omega_t)}$$

휨이 없는 탄성 막의 초기 및 경계조건은  $w(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $w(\mathbf{x}, 0) = w_0$ ,  $w(\mathbf{x}, 0)_{,t} = w_1$ 이다. 경계에서  $\bar{\tau}$ 는  $\tau = \bar{\tau}$ ,  $\tau_{,x} = \tau_{,y} = 0$ 이다. 휨과 고정단의 고려에서는  $w(\mathbf{x}, t)_{,x} = 0$ 이고  $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}$ 는 이 전의 조건에 추가된다.

#### 감사의 글

이 논문은 2019년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2019R1F1A1058327)

#### 참고문헌

- [1] Ferrel, J.L. & Medeiros, L.A., "Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains", Portugaliae Mathematica, 56 Fasc. 4, (1999) pp.466-500
- [2] Ferrel, J.L. & Medeiros, L.A., "Vibrations of elastic membranes with moving boundaries", Nonlinear Analysis 45 (2001) pp.363-382
- [3] Medeiros, L.A., Limaco, J. & Menezes, S.B., "Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part one", J. of Computational Analysis and Applications 4(2) (2002) pp.91-127
- [4] Medeiros, L.A., Limaco, J. & Menezes, S.B., "Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part two", J. of Computational Analysis and Applications 4(2) (2002) pp.211-263
- [5] Clark, H.R., Rincon, M.A. & Rodrigues, R.D., "Beam equation with weak-internal damping in domain with moving boundary", Applied Numerical Mathematics 47 (2003) pp.139-157
- [6] Rincon, M.A. & Rodrigues, R.D., "Numerical solution for the model of vibrating elastic membrane with moving boundary", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12 (2007) pp.1089 - 1100
- [7] Ghuku, S. & Saha, K.N., "Large deflection analysis of curved beam problem with varying curvature and moving boundaries", Engineering Science and Technology, 21 (2018) pp.408 - 420